

赋 p -Amemiya 范数 Musielak-Orlicz 序列空间的 Kadec-klee 性质

赵 丽, 崔云安

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: Kadec-klee 性质是 Banach 空间理论一个重要的性质, 其与空间的逼近紧及非扩张映射的不动点性质密切相关。基于此给出了赋 p -Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间在单位球面上是 H 点的充分必要条件, 又给出了赋 p -Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间具有 Kadec-Klee 性质, 一致 Kadec-klee 性, 接近一致凸的充分必要条件。

关键词: Musielak-Orlicz 序列空间; p -Amemiya 范数; Kadec-klee 性质; 接近一致凸性; 一致 Kadec-klee 性

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.05.020

中图分类号: O177.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-2683(2021)05-0157-08

Kadec-klee Property in Musielak-Orlicz of Sequence Space Equipped with p -Amemiya Norm

ZHAO Li, CUI Yun-an

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: As we known, H property is a important property in theory of Banach spaces. It closely connects with the approximation compactness and fixed point property of nonexpansive mapping. In this paper, we give necessary and sufficient conditions for a point in a Musielak-Orlicz sequence spaces equipped with p -Amemiya norm to be an H-point. we give necessary and sufficient conditions for a Musielak-Orlicz sequence spaces equipped with p -Amemiya norm to have the Kadec-Klee property, the uniform Kadec-Klee property and to be nearly uniformly convex.

Keywords: Musielak-Orlicz sequence space; p -Amemiya norm; Kadec-Klee property; uniform Kadec-Klee property; nearly uniformly convex

0 引 言

Kadec-Klee 性质是 Banach 空间几何学的重要

概念。有关 Musielak-Orlicz 空间的 Kadec-Klee 性质已有很多讨论。1995 年^[4]崔云安给出了 Musielak-Orlicz 序列空间的 Kadec-Klee 性质的判别条件。1997 年^[14], 王廷辅, 崔云安等给出了赋 Luxemburg

收稿日期: 2020-02-23

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 赵 丽(1996—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 崔云安(1961—), 男, 博士, 教授, 博士研究生导师, E-mail: cuiya@hrbust.edu.cn。

范数 Musielak-Orlicz 函数空间的 Kadec-Klee 性质的判别条件。2003 年崔云安^[1],左明霞等给出了对赋 Orlicz 和赋 Luxemburg 范数在 Musielak-Orlicz 序列空间的 H 点的刻画。2000 年崔云安^[15]等研究了 Musielak-Orlicz 序列空间的几何性质。给出了一般 Orlicz 序列空间中具有 Orlicz 范数的点为 H-点的一个判据。同时,给出了具有 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间具有 Kadec-Klee 性质、一致 Kadec-Klee 性质且几乎一致凸的充要条件。本文主要给出赋 p-Amemiya 范数在 Musielak-Orlicz 序列空间在单位球面上的 H 点的刻画,给出赋 p-Amemiya 范数在 Musielak-Orlicz 序列空间 Kadec-Klee 性质,一致 Kadec-Klee 性质,接近一致凸的充要判据。

1 预备知识

以 X 表示一个 Banach 空间, $B(X), S(X), B(X^*), S(X^*)$ 分别表示 X 和 X^* 的单位球和单位球面,用 $x_n \xrightarrow{w} x$ 表示 x_n 弱收敛 x ,即对任意的 $f \in X^*$,有 $x_n \xrightarrow{w} x$ 。

定义 1 称 $x \in S(X)$ 为 H 点(也称 Kadec-Klee 点),如果 $\{x_n\} \subset S(X), x_n \xrightarrow{w} x$ 蕴含 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ 。如果在单位球面上的每一点都是 H 点,则称 X 具有 H 性质。

称序列 $\{x_n\}$ 为 $i \in N, \exists u_i > 0$ 可分序列是指:

$$sep(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$$

定义 2 称 Banach 空间 X 为一致 Kadec-Klee 性质(UKK),如果对任意的 $\delta > 0$,存在 $\delta \in (0, 1)$,使得对于 $x_n \in S(X), x_n \xrightarrow{w} x, sep(\{x_n\}) \geq \varepsilon$,有 $\|x\| < 1 - \delta$ 。

定义 3 称 Banach 空间 X 为接近一致凸(NUC),如果对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,对于 $x_n \in S(X), sep(\{x_n\}) \geq \varepsilon$,则 $\overline{co}(x_n) \cap B_\delta(0) \neq \emptyset$,其中 $B_\delta(0) = \{x : \|x\| < \delta\}$ 。

定义 4 称函数列 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ 为 Musielak-Orlicz 函数是指:

$\Phi_i : [-\infty, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是凸的,偶的并在 $[0, +\infty)$ 左连续,且 $\Phi_i(0) = 0$ 。

对所有的 $i \in N, \exists u_i > 0$,

$$0 < \Phi_i(u) < \infty.$$

称 $\Psi = \{\Psi_i\}_{i=1}^\infty$ 为 Φ 的余函数,即

$$\Psi_i(v) = \sup_{u>0}\{u \mid v \mid - \Phi_i(u)\}$$

定义 5 设 $x \in l_0$,定义 x 的模定义为

$$\rho_\Phi(x) = \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(x(i))$$

Musielak-Orlicz 序列空间

$$l_\Phi = \{x = (x(i))_{i=1}^\infty : \exists \lambda > 0, \rho_\Phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(\lambda x(i)) < \infty\}$$

$$h_\Phi = \{x = (x(i))_{i=1}^\infty : \forall \lambda > 0, \rho_\Phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(\lambda x(i)) < \infty\}$$

关于 Luxemburg 范数

$$\|x\|_\Phi$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(x(i)/\lambda) \leq 1\right\}$$

或 Orlicz 范数

$$\|x\|_\Phi^o = \sup\left\{\sum_{i=1}^\infty x(i)y(i) : \rho_\Psi(y) = \sum_{i=1}^\infty \Psi_i(y(i)) \leq 1\right\} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \rho_\Phi(kx)) =$$

$$\inf_{k>0} \left\{1 + \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(kx(i))\right\}$$

见文[17]

均称为 Banach 空间。简记为

$$l_\Phi = [l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi], h_\Phi = [h_\Phi, \|\cdot\|_\Phi]$$

$$l_{(\Phi)} = [l_\Phi, \|\cdot\|_L], h_{(\Phi)} = [h_\Phi, \|\cdot\|_L]$$

定义 6 对任意的 $1 \leq p \leq \infty, u > 0$,定义

$$s_p(u) = JB\left(\left\{(1+u^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty\right.\right.$$

$$\left.\max\{1, u\}, p = \infty\right\}$$

从而,对于所有的 $1 \leq p < \infty, x \in l_\Phi$,可定义

$s_{\Phi,p} = s_p \circ \rho_\Phi(x)$ 。可定义如下 p-Amemyia 范数:

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_{\Phi,p}(x), 1 \leq p \leq \infty$$

l_Φ 关于 p-Amemyia 范数构成了 Banach 空间,称为赋 p-Amemyia 的 Musielak-Orlicz 序列空间,我们记为:

$$l_{\Phi,p} = [l_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}], h_{\Phi,p} = [h_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}],$$

注:当 $p = 1$ 时, $\|x\|_{\Phi,p} = \|x\|^o$,

当 $s_p(u) = \max\{1, u\}$ 时, $\|x\|_{\Phi,p} = \|x\|_L$,

当 $1 < p < \infty$ 时, $\|x\|_L \leq \|x\|_{\Phi,p} \leq \|x\|^o$ 。

定义 7 称 Musielak-Orlicz 函数 $\Phi = (\Phi_i)$ 满足 δ_2 条件是指:存在常数 $k > 0, a > 0$ 和 $c_i > 0$,满足 $\sum_{i=1}^\infty c_i < +\infty$,当 $\Phi_i(u) \leq a$ 时,有 $\Phi_i(2u) \leq k\Phi_i(u) + c_i (i = 1, 2, \dots)$ 。

定义 8 定义如下函数:

$$\alpha_p : l_{\Phi,p} \rightarrow [-1, \infty]$$

$\alpha_p(x)$

$$= \begin{cases} \rho_{\Phi}^{p-1}(x) \rho_{\Psi}(p(kx)) - 1, & 1 \leq p < \infty \\ -1, & p = \infty, \rho_{\Phi}(x) \leq 1 \\ \rho_{\Psi}(p(kx)), & p = \infty, \rho_{\Phi}(x) \geq 1 \end{cases}$$

$k_p^*: l_{\Phi,p} \rightarrow [0, +\infty]$, $k_p^{**}: l_{\Phi,p} \rightarrow (0, +\infty]$ 另外, 定义

$$k_p^*(x) = \inf\{k > 0: \alpha_p(kx) \geq 0\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

$$k_p^{**}(x) = \sup\{k > 0: \alpha_p(kx) \leq 0\} \quad (\sup \emptyset = \infty)$$

易知

$$\forall 1 < p < \infty, x \in l_{\Phi,p}, k_p^*(x) \leq k_p^{**}(x)$$

$$\text{记 } k(x) = \{0 < k < \infty: k_p^* \leq k \leq k_p^{**}\}$$

2 主要结果及证明

定理1 对任意的 $x \in l_{\Phi,p}, x \neq 0$, 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{i_0}(u)}{u} = +\infty, i_0 \in \text{supp}(x)$ 则 $k(x) \neq \emptyset$.

证明: 反证法: $x \neq 0$, 存在 $i_0 \in N, x(i_0) \neq 0$

$$\|x\|_{\Phi,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^n \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_i(kx(i_0))}{k |x(i_0)|} \cdot |x(i_0)| = +\infty$$

故结论成立。

定理2 $\|x\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}}$ 的充分必要条件是 $k \in k_p(x)$.

分以下两种情形

(i) $k_p^*(x) = +\infty$

证明: 由定理1知,

$$a_i = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi_i(u)}{u} < \infty \quad (i \in \text{supp}(x)), \text{ 故}$$

$$\|x\|_{\Phi,p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^n \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \Phi_i(kx(i)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(kx(i))}{kx(i)} \cdot |x(i)| =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi_i(u)}{u} \cdot |x(i)| =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i |x(i)|$$

(ii) $k_p^*(x) < +\infty$,

证明: 定义

$$F(k) = \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf\{k > 0: F(k)\}.$$

按通常数学分析规则, 可求 $F(k)$ 在 k 点求右导数, 得

$$F'_+(k) = -\frac{1}{k^2} [1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^p]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{p} [1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^p]^{\frac{1}{p}-1} \times$$

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^{p-1} \cdot p \int_G p(kx(t)) |x(t)| d\mu =$$

$$\frac{1}{k^2} (1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\cdot \{(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(p(kx(i))) - 1\}$$

假设存在 $k_0 \in (0, \infty)$, 使得 $k_p^* < k_0 < k_p^{**}$, 对于 $k \in (0, k_0)$, 则由 $k_p^*(x)$ 的定义知

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(p(kx(i))) \leq 1$$

这时 $F'_+(k) \leq 0$, 所以 $(0, k_0)$ 中每一点都不是 $F(k)$ 的极小值点。

现在我们说明 $(k_0, +\infty)$ 中的每一点都不是 $F(k)$ 的极小值点, 事实上, 若对于任意的 $k > k_0$ 时, $F(k)$ 均无意义, k 一定不是 $F(k)$ 的极小值点。

若存在 $k \in (k_0, +\infty)$, 令

$$k_1 = \sup\{k \in (k_0, +\infty): F(k) < \infty\},$$

则由 $k_p^{**}(x)$ 的定义知, 当 $k_0 < k < k_1$ 时, 有

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(p(kx(i))) \geq 1$$

同样考虑 $F(k)$ 在 k 点求右导数, 则 $F'_+(k) \geq 0$ 。所以 k 不是 $F(k)$ 的极小点。由 $F(k)$ 的连续性, 立即可得 $(k_0, +\infty)$ 中的每一点都不是 $F(k)$ 的极小值点。

因此当且仅当 $k \in [k_p^*(x), k_p^{**}(x)]$,

$$\|x\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}}.$$

定理3 $x \in S(l_{\Phi,p})$ 是 H 点的充分必要条件是 $\Phi \in \delta_2$ 或 $k(x) = \emptyset$.

证明: 必要性

假设 $\Phi \notin \delta_2$ 且 $k(x) \neq \emptyset$.

我们分下面两种情形讨论。

(i) $x \notin S(h_{\Phi,p})$,

令 $x = (x(1), x(2), \dots)$,

$$[x]_n = (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)$$

则存在 $a > 0$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - [x]_n\|_{\Phi, p} = a > 0.$$

记

$$x_{n,m} = (0, \dots, 0, x(m+1), \dots, x(n+m), 0, \dots)$$

使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,m}\|_{\Phi, p} = \| (0, \dots, 0, x(m+1), x(m+2), \dots) \|_{\Phi, p} = a > 0$$

$$\text{存在 } m_n \in N, \text{ 使得 } \|x_{n,m}\|_{\Phi, p} \geq \frac{a}{2},$$

则存在一序列 $m_1 < m_2 < \dots$, 使得

$$\|(\overbrace{0, \dots, 0}^{m_i}, x(m_i+1), \dots, x(m_{i+1}), 0, \dots)\|_{\Phi, p} \geq \frac{a}{2}$$

记

$$x_i = (x(1), \dots, x(m_i), 0, \dots, 0, x(m_{i+1}+1), \dots)$$

其中 $i = 1, 2, \dots$

于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x(1), \dots, x(m_i), 0, \dots)\|_{\Phi, p} \rightarrow \|x\|_{\Phi, p} = 1$$

$$\text{又因为 } \|x_i\|_{\Phi, p} \leq \|x\|_{\Phi, p} = 1,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} \leq 1.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} = 1.$$

$$\text{下证 } x_i \xrightarrow{w} x$$

由 $x_i - x \in h_\Phi$, 对任意的 $f \in (l_{\Phi, p})^*$, $f = V + \varphi$ (其中 $V \in l_\Psi$ (范数等价, 所以对偶空间相同), φ 为奇异泛函) 有 $\varphi(x_i - x) = 0, V(x) < +\infty$, 则

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v(i)x(i) < +\infty,$$

$$\text{于是 } V(x - x_i) = \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} v(j)x(j),$$

由级数收敛的 Cauchy 判别法则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(x_i - x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} x(j)v(j) = 0$$

$$\text{所以 } x_i \xrightarrow{w} x_0 \text{ 而}$$

$$\begin{aligned} & \|x_i - x\|_{\Phi, p} \\ &= \|(0, \dots, 0, x(m_i+1), \dots, x(m_{i+1}), 0, \dots)\|_{\Phi, p} \\ &\geq \frac{a}{2} \end{aligned}$$

与 H 点相矛盾, 所以结论得证。

$$(ii) x \in h_{\Phi, p}$$

因为 $k(x) \neq \varphi$, 我们取 $k > 1$, 使得

$$1 = \|x\|_{\Phi, p} = \frac{1}{k} (1 + \rho_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}.$$

又因为 $\Phi \notin \Delta_2$, 则存在 $z \in S(l_{\Phi, p})$,

使得 $\rho_\Phi(z) < \infty$. 于是令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, z(n+1), \dots)\|_{\Phi, p} = a > 0,$$

由以上我们也可找到一序列

$$m_1 < m_2 < \dots, \text{ 使得}$$

$$\|(0, \dots, z(m_i+1), \dots, z(m_{i+1}), 0, \dots)\|_{\Phi, p} \geq \frac{a}{2}$$

取

$$x_i = (x(i), \dots, x(m_i), \frac{z(m_i+1)}{k}, \dots, \frac{z(m_{i+1})}{k},$$

$$x(m_{i+1}+1), x(m_{i+1}+2), \dots)$$

于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x(1), \dots, x(m_i), 0, \dots)\|_{\Phi, p} \rightarrow \|x\|_{\Phi, p} = 1$$

和

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + (\sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(kx_n(j)))^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx_i(i)) + \sum_{i=m_n+1}^{m_{n+1}} \Phi_i(z(i)))^p)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m_n+1}^{m_{n+1}} \Phi_i(z(i)))^p)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\Phi, p} = 1$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i\|_{\Phi, p} = 1.$$

$$\text{下证 } x_i \xrightarrow{w} x$$

由 $x_i - x \in h_\Phi$ 对任意的

$f \in (l_{\Phi, p})^*, f = V + \varphi$ (其中 $V \in l_\Psi$ (范数等价, 所以对偶空间相同), φ 为奇异泛函) 有 $\varphi(x_i - x) = 0, V(x) < +\infty$,

$$\text{那么 } V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v(i)x(i) < +\infty,$$

$$\text{于是有 } V(x - x_i) = \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} v(j)x(j),$$

由级数收敛的 Cauchy 判别法知,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(x_i - x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} x(j)v(j) = 0.$$

$$\text{所以 } x_i \xrightarrow{w} x_0.$$

由于 $x \in h_{\Phi, p}$, 我们能找到 $n_0 \in N$,

当 $n > n_0$ 时, 有

$$\|(0, \dots, x(m_i+1), x(m_i+2), \dots)\|_{\Phi, p} \leq \frac{a}{8k}.$$

则

$$\|x_i - x\|_{\Phi, p} \geq$$

$$\left\| \left(0, \dots, 0, \frac{z(m_i+1)}{k}, \dots, \frac{z(m_{i+1})}{k}, 0, \dots \right) \right\|_{\Phi, p} - \\ \left\| (0, \dots, 0, x(m_i+1), \dots, x(m_{i+1}+1), 0, \dots) \right\|_{\Phi, p} \geq \\ \frac{a}{2k} - \frac{a}{4k} = \frac{a}{4k}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i - x\|_{\Phi, p} \geq \frac{a}{4k} \neq 0$,

所以这与 x 是 H 点矛盾。

充分性

设 $\{x_n\} \subset S(l_{\Phi, p})$, $x_n \xrightarrow{w} x$,

分以下 4 种情况讨论。

(i) $k(x) = \phi, k(x_n) \neq \phi (n = 1, 2, \dots)$

由于 $k(x_n) \neq \phi$, 则存在 $k_n > 1$, 使得

$$\|x_n\|_{\Phi, p} = \frac{1}{k_n} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_n x_n))^{\frac{1}{p}} = 1.$$

则 $\{k_n\}$ 为无界的。若 $\{k_n\}$ 有界,

不妨设存在 $k_0 > 0$, 满足 $k_n \rightarrow k_0$ 。

又因为 $k(x) = \phi$, 所以只能在 $k = +\infty$ 达到极小值。

故

$$\frac{1}{k_0} [1 + (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(k_0 x(i)))^p]^{\frac{1}{p}} > \|x\|_{\Phi, p} = 1,$$

所以我们就找到 $n_1 \in N$, 使得

$$\frac{1}{k_0} [1 + (\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_0 x(i)))^p]^{\frac{1}{p}} > 1.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i), (i = 1, 2, \dots)$,

所以

$$1 = \|x_n\|_{\Phi, p} =$$

$$\frac{1}{k_n} [1 + (\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)))^p]^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\frac{1}{k_n} [1 + (\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)))^p]^{\frac{1}{p}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{k_0} [1 + (\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_0 x(i)))^p]^{\frac{1}{p}} > 1 (n \rightarrow \infty)$$

为了方便, 不妨假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ 。

又因为 $k(x) = \phi$, 所以 $\|x\|_{\Phi, p} = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| a_i$

则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们取 $n_1 \in N$, 使得

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty} |x(i)| a_i < \varepsilon.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i), (i = 1, 2, \dots)$,

所以我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\Phi_i(k_n x_n(i))}{|k_n x_n(i)|} \cdot |x_n(i)| =$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} |x(i)| a_i > 1 - \varepsilon$$

于是存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) < 1 + \varepsilon$$

又因为 $1 = \|x_n\|_{\Phi, p}^p = \frac{1}{k_n^p} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_n x_n))$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ 。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n^p} + \left(\frac{\rho_{\Phi}(k_n x_n)}{k_n} \right)^p \right) = 1$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\Phi}(k_n x_n)}{k_n} = 1.$$

故

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \rho_{\Phi}(k_n x_n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i))$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \leq 2\varepsilon$$

又因为

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi, p} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left(1 + \left(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \leq 2\varepsilon$$

所以当 $n > N_1$ 时, 有 $\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi, p} < 2\varepsilon$, 再取

$n > N_2$ 时, 有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi, p} < \varepsilon,$$

令 $N = \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\|x_n - x\|_{\Phi, p} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi, p} =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi, p} \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi, p} + \left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi, p} \leq$$

$$\varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

由 ε 的任意性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\Phi, p} = 0$ 。

(ii) $k(x) = \phi, k(x_n) = \phi (n = 1, 2, \dots)$ 。

证明: 由于 $k(x_n) = \phi$ 和 $k(x) = \phi$,

所以有 $\|x_n\|_{\Phi,p} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_n(i)| a_i = 1$ 和 $\|x\|_{\Phi,p}$
 $= \sum_{i=1}^{n_1} |x(i)| a_i = 1$ 。

则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们取 $n_1 > N$ 时, 有

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty} |x(i)| a_i < \frac{\varepsilon}{2}。$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i), (i = 1, 2, \dots)$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_1} |x_n(i)| a_i = \sum_{i=1}^{n_1} |x(i)| a_i > 1 - \frac{\varepsilon}{2}。$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n_1} |x_n(i)| a_i > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

又因为 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_n(i)| a_i = 1$, 所以 $\sum_{i=n_1+1}^{\infty} |x_n(i)| a_i < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

再当 $n > N_2$ 时, 有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} < \frac{\varepsilon}{2}。$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\|x_n - x\|_{\Phi,p} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} +$$

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} +$$

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} (x_n(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由 ε 的任意性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\Phi,p} = 0$ 。

(iii) $k(x) \neq \phi, k(x_n) = \phi (n = 1, 2, \dots)$ 。

证明: 由于 $k(x) \neq \phi$, 则存在 k , 使得

$$1 = \|x\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}}。$$

又因为 $\Phi \in \delta_2$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_1 > N$, 使得

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon。$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i) (i = 1, 2, \dots)$,

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_1} |x_n(i)| a_i = \sum_{i=1}^{n_1} |x(i)| a_i$,

存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon。$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n_1} |x_n(i)| a_i > \left\| \sum_{i=1}^{n_1} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} > 1 - \varepsilon。$$

于是当 $n > n_1$ 时, 有 $\sum_{i=1}^{n_1} |x_n(i)| a_i > 1 - \varepsilon$ 。

于是 $\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon$ 。

所以当 $n > n_2$ 时, 有

$$\|x_n - x\|_{\Phi,p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} +$$

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} +$$

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} <$$

$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

由 ε 的任意性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\Phi,p} = 0$ 。

(iv) $k(x) \neq \phi, k(x_n) \neq \phi (n = 1, 2, \dots)$ 。

证明: 由 $k(x_n) \neq \phi$, 有

$$1 = \|x_n\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k_n} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_n x))^{\frac{1}{p}}。$$

由(i)知, $\{k_n\}$ 有界(若无界, 则 $k(x) = \phi$)

不妨设 $k_n \rightarrow k$, 由法度引理,

$$1 = \|x\|_{\Phi,p} \leq \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}} = 1$$

$$\text{即 } \|x\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k} (1 + \rho_{\Phi}^p(kx))^{\frac{1}{p}}。$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_1 > N$, 使得

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon。$$

又已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i), (i = 1, 2, \dots)$$

$$\|(x(1), \dots, x(n), 0, \dots)\|_{\Phi,p} > 1 - \varepsilon,$$

存在 $n_0 \in N$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\|x_n(1), \dots, x_n(n_1), 0, \dots\|_{\Phi,p} > 1 - \varepsilon。$$

$$\text{及 } \left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon。$$

又由

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} > 1 - \varepsilon$$

则

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(kx(i)) \right)^p > (1 - \varepsilon)^p \cdot k^p$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(kx(i)) > [(1 - \varepsilon)^p \cdot k^p - 1]^{\frac{1}{p}}$$

又因为 $k(x_n) \neq \phi$, 则

$$1 = \|x_n\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k_n} (1 + \rho_{\Phi}^p(k_n x_n))^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{k_n} \left[1 + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

化简后得

$$\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) = (k_n^p - 1)^{\frac{1}{p}}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \right] \geq$$

$$[(k(1 - \varepsilon))^p - 1]^{\frac{1}{p}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i))$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i)) \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((k^p - 1)^{\frac{1}{p}} - [k^p (1 - \varepsilon)^p - 1]^{\frac{1}{p}}) \rightarrow$$

$$(k^p - 1)^{\frac{1}{p}} - [k^p (1 - \varepsilon)^p - 1]^{\frac{1}{p}}$$

令

$$f(\varepsilon) = (k^p - 1)^{\frac{1}{p}} - (k^p (1 - \varepsilon)^p - 1)^{\frac{1}{p}}$$

则 $f(\varepsilon)$ 关于 ε 连续, 故

对于任意的 $\delta > 0$, 存在 ε_0 , 当 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $f(\varepsilon) < \delta$ 。

因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon_0$$

再取 $N_2 = \max\{N_1, n_0\}$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$\|x - x_n\|_{\Phi,p} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} (x_n(i) - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} +$$

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=n_1+1}^{\infty} x(i) e_i \right\|_{\Phi,p} <$$

$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

由 ε 的任意性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\Phi,p} = 0$ 。

推论 1 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{i_0}(u)}{u} = +\infty$, 则赋 p-Amemiya

范数的 Musielak-Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 具有 Kadec-Klee

性质的充分必要条件是 $\Phi \in \delta_2$ 。

定理 4 赋 p-Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 具有一致 Kadec-Klee 性质(UKK) 的充分必要条件是 $\Phi \in \delta_2$ 。

证明: 必要性显然成立。(一致 Kadec-Klee 性质蕴含 Kadec-Klee 性质, 而 Kadec-Klee 性质 $\Leftrightarrow \Phi \in \delta_2$)

我们只需证充分性。

我们取 $\varepsilon > 0, x_n \in S(X), \text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon$ 和 $x_n \xrightarrow{w} x \in l_{\Phi,p}$, 现在对于任意的 $m \in N$, 有 $\text{sep}(\{\sum_{i=m}^{\infty} x_n(i) e_i\}) > \varepsilon$ 。

由定理 3 我们知道 $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow x_n \rightarrow x$, 因此令 $x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots), x_n^m = (0, \dots, 0, x_n(m+1), \dots)$, 于是有 $\text{sep}(x_n) = \text{sep}(x_n^m)$,

即 $\text{sep}(\{\sum_{i=m+1}^{\infty} x_n(i) e_i\}) > \varepsilon$ 。因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $m, n \in N$, 使得 $\left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} x_n(i) e_i \right\| > \frac{\varepsilon}{2}$ 。

由 $\Phi \in \delta_2$, 对于 $m \in N$, 则存在 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, 使得 $I_{\Phi}(\sum_{i=m+1}^{\infty} x_n(i) e_i) > \varepsilon_1$ 。

因为 $k(x_n) \neq \varphi(n = 1, 2, \dots)$

即

$$\|x_n\|_{\Phi,p}^p = \frac{1}{k_n^p} (1 + [\sum_{i=1}^m \Phi_i(k_n x_n(i)) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \Phi_i(k_n x_n(i))]^p)$$

由定理 3 (iv), 我们知道 $\{k_n\}$ 有界的, 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i) (i = 1, 2, \dots)$ 。

则

$$\|x_n\|_{\Phi,p}^p \geq \frac{1}{k^p} (1 + [\sum_{i=1}^m \Phi_i(kx(i)) + \varepsilon_1]^p)$$

在 $\delta' > 0$, 当 $\delta' = \frac{\varepsilon_1}{4} \cdot k$ 时, 我们有

$$\|x_n\|_{\Phi,p}^p \geq \frac{1}{k^p} [1 + (\sum_{i=1}^m \Phi_i(kx(i)) + \varepsilon_1)^p] \geq$$

$$\frac{1}{k^p} [1 + (\sum_{i=1}^m \Phi_i(kx(i)) + \varepsilon_1)^p + \delta'] =$$

$$\frac{1}{k^p} (1 + (\sum_{i=1}^m \Phi_i(kx(i)) + \varepsilon_1)^p) + \frac{1}{k^p} \cdot \delta'$$

因此

$$1 \geq \|x_n\|_{\Phi,p} \geq \frac{1}{k} (1 + (\sum_{i=1}^m \Phi_i(kx(i)))^p)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon_1}{4} \geq$$

$$\|x\|_{\Phi,p} + \frac{\varepsilon_1}{4}$$

即 $\|x\|_{\Phi,p} < 1 - \frac{\varepsilon_1}{4}$.

推论2 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{i_0}(u)}{u} = +\infty$, 则赋 p-Amemiya

范数的 Musielak-Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 接近一致凸 (NUC) 的充分必要条件是它是自反的。

参考文献:

- [1] 左明霞, 崔云安. Musielak-Orlicz 序列空间的 H 性质[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2003, 20(4): 5.
ZUO Mingxia, CUI Yunan. H-property in Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2003, 20(4): 5.
- [2] 吴从圻, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 序列空间的 H 性质[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1985(A2): 6.
WU Congxin, CHEN Shutao. H-property of Orlicz Sequence Space [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1985(A2): 6.
- [3] KAMINSKA A. Uniform Rotundity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. Journal of Approximation Theory, 1986, 47(4): 302.
- [4] 崔云安. Musielak-Orlicz 序列空间的一些凸性[J]. 数学杂志, 1995, 15(3): 291.
CUI Yunan. Some Convexity of Musielak-Orlicz Sequence Space [J]. Journal of Mathematics, 1995, 15(3): 291.
- [5] KACZMARK R. Uniform Rotundity in Every Direction of Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Collectanea Mathematica, 2019, 70(1): 71.
- [6] CHEN Lili, CUI Yunan. Complex Extreme Points and Complex Rotundity in Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73(5): 1389.
- [7] 贾静, 王俊明. 赋 p-Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 空间的强端点[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2018, 23(5): 128.
JIA Jing, WANG Junming. Extreme Points in Musielak-Orlicz Space Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2018, 23(5): 128.
- [8] CHEN Lili, CUI Yunan, ZHAO Yanfeng. Complex Convexity of Musielak-Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014(2): 151.
- [9] CUI Yunan, DUAN Lifan, HUDZIK H, et al. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces; Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms[J]. Nonlinear Analy-

sis, 2007, 69(5): 1796.

- [10] KACZMARK R. Uniform Rotundity of Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Mathematische Nachrichten, 2018, 291(10): 1514.
- [11] HE Xin, CUI Yunan, HUDZIK H. The Fixed Point Property of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013(1): 1.
- [12] CHEN Lili, CUI Yunan. Complex Rotundity of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 378(1): 151.
- [13] 左明霞, 刘红娇. 赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的 k-β 点[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2019, 24(1): 118.
ZUO Mingxia, LIU Hongjiao. On the (k-β) Points of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2019, 24(1): 118.
- [14] WANG Tingfu, CUI Yunan, ZHANG Tao. Kadec-Klee Property in Musielak-Orlicz Function Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Scientiae Mathematicae. 1998, 24(3): 339.
- [15] CUI Yunan, THOMPSON H B. On Geometric Properties in Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Function Spaces, 2000, 213(4): 149.
- [16] HUDZIK H, MALIGRANDA L. Amemiya Norm Equals Orlicz Norm in General [J]. Indagationes Mathematicae, 2000, 11(4): 573.
- [17] THOMPSON H B, CUI Yunan. The Fixed Point Property in Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. 2001, 42(2): 299.
- [18] 孟晨晖, 王廷辅. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的接近一致凸性[J]. 数学季刊, 2000, 15(1): 1.
MENG Chenhui, CUI Yunan, WANG Tingfu. Nearly Uniformly Convex in Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2000, 15(1): 1.
- [19] KAMINSKA A, KURC W. Weak Uniform Rotundity in Orlicz Spaces [J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1986, 27(4): 651.
- [20] 王廷辅, 滕岩梅, 边淑蓉. Musielak-Orlicz 序列空间的复凸性[J]. 数学物理学报, 2000, 20(2): 246.
WANG Tingfu, TENG Yanmei, BIAN Shurong. Complex Convexities of Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. Acta Mathematica Scientia, 2000, 20(2): 246.

(编辑: 温泽宇)